

Problemi variazionali per equazioni di Schrödinger nonlineari su grafi metrici (ovvero, di punti, linee e condensati)

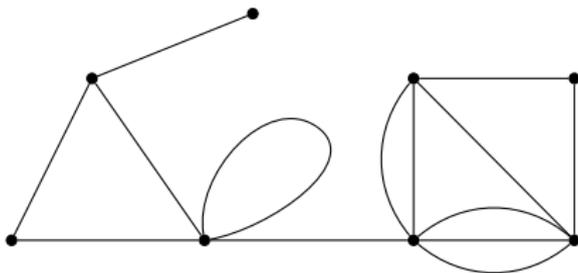
Simone Dovetta

Istituto di Matematica Applicata e Tecnologie Informatiche "E. Magenes"
Consiglio Nazionale delle Ricerche - Pavia

Premio di Tesi di Dottorato Tullio Levi-Civita
Padova, 21 gennaio 2021

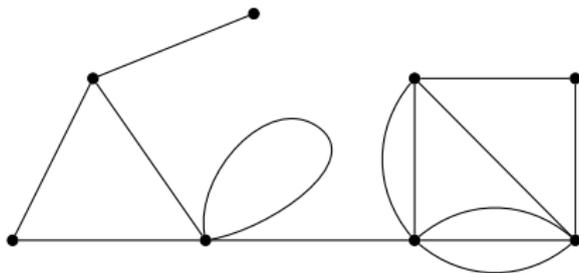
Cos'è un grafo metrico?

Un **grafo metrico** è un oggetto matematico formato dall'unione di un certo numero di **archi**, uniti nei loro **estremi**.



Cos'è un grafo metrico?

Un **grafo metrico** è un oggetto matematico formato dall'unione di un certo numero di **archi**, uniti nei loro **estremi**.

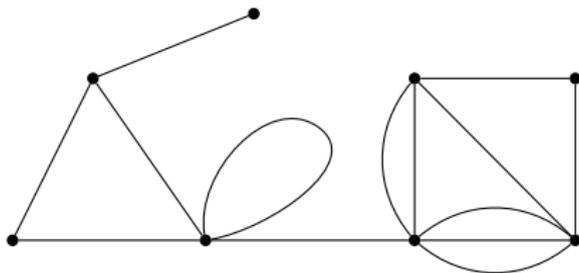


Ogni arco definisce un **lato** del grafo.

Ogni punto in cui più lati si incontrano definisce un **nodo**.

Cos'è un grafo metrico?

Un **grafo metrico** è un oggetto matematico formato dall'unione di un certo numero di **archi**, uniti nei loro **estremi**.



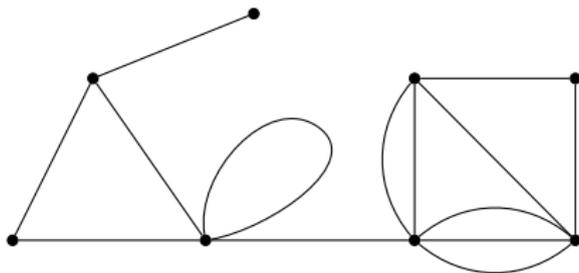
Ogni arco definisce un **lato** del grafo.

Ogni punto in cui più lati si incontrano definisce un **nodo**.

Ad esempio, nel grafo in figura ci sono 8 nodi e 14 lati.

Cos'è un grafo metrico?

Un **grafo metrico** è un oggetto matematico formato dall'unione di un certo numero di **archi**, uniti nei loro **estremi**.



Ogni arco definisce un **lato** del grafo.

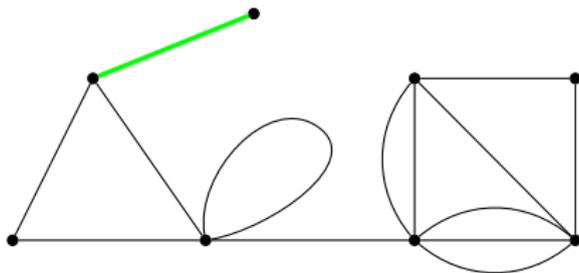
Ogni punto in cui più lati si incontrano definisce un **nodo**.

Ad esempio, nel grafo in figura ci sono 8 nodi e 14 lati.

In un grafo si possono trovare lati e nodi con proprietà particolari,

Cos'è un grafo metrico?

Un **grafo metrico** è un oggetto matematico formato dall'unione di un certo numero di **archi**, uniti nei loro **estremi**.



Ogni arco definisce un **lato** del grafo.

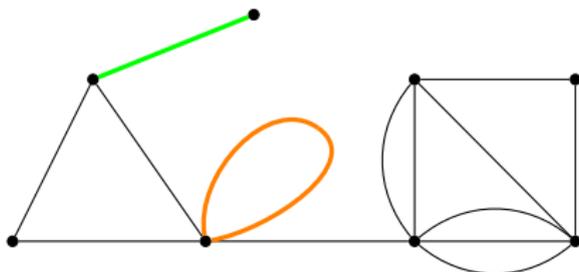
Ogni punto in cui più lati si incontrano definisce un **nodo**.

Ad esempio, nel grafo in figura ci sono 8 nodi e 14 lati.

In un grafo si possono trovare lati e nodi con proprietà particolari, come **lati terminali**,

Cos'è un grafo metrico?

Un **grafo metrico** è un oggetto matematico formato dall'unione di un certo numero di **archi**, uniti nei loro **estremi**.



Ogni arco definisce un **lato** del grafo.

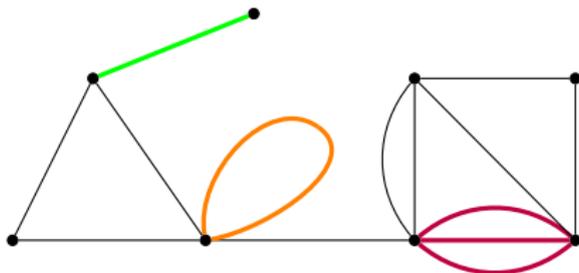
Ogni punto in cui più lati si incontrano definisce un **nodo**.

Ad esempio, nel grafo in figura ci sono 8 nodi e 14 lati.

In un grafo si possono trovare lati e nodi con proprietà particolari, come **lati terminali**, **loop**

Cos'è un grafo metrico?

Un **grafo metrico** è un oggetto matematico formato dall'unione di un certo numero di **archi**, uniti nei loro **estremi**.



Ogni arco definisce un **lato** del grafo.

Ogni punto in cui più lati si incontrano definisce un **nodo**.

Ad esempio, nel grafo in figura ci sono 8 nodi e 14 lati.

In un grafo si possono trovare lati e nodi con proprietà particolari, come **lati terminali**, **loop** e **lati multipli**.

Una moltitudine infinita di grafi

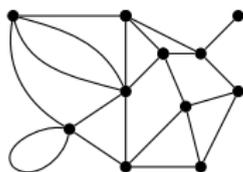
Esistono **infiniti grafi** metrici diversi, a seconda di quanti e quali nodi/lati si prendono e di come vengono uniti tra loro.

Una moltitudine infinita di grafi

Esistono **infiniti grafi** metrici diversi, a seconda di quanti e quali nodi/lati si prendono e di come vengono uniti tra loro.

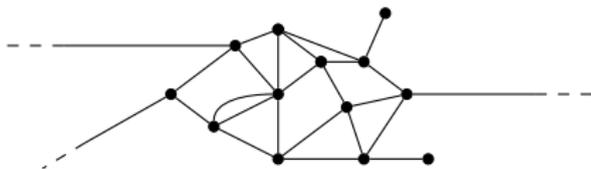
Grafi limitati

(numero finito di nodi e di lati di lunghezza finita)

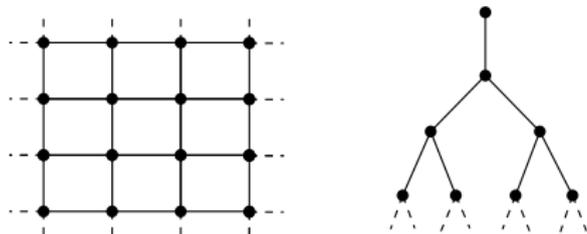


Grafi con semirette

(parte limitata + numero finito di lati di lunghezza infinita)



Grafi con numero infinito di lati di lunghezza finita



Perché i grafi?

Permettono di studiare matematicamente fenomeni reali in cui lo spazio è **ramificato**.

Perché i grafi?

Permettono di studiare matematicamente fenomeni reali in cui lo spazio è **ramificato**.

Esempio: rete stradale



Perché i grafi?

Permettono di studiare matematicamente fenomeni reali in cui lo spazio è **ramificato**.

Esempio: rete stradale



Perché i grafi?

Permettono di studiare matematicamente fenomeni reali in cui lo spazio è **ramificato**.

Esempio: rete stradale



Perché i grafi?

Permettono di studiare matematicamente fenomeni reali in cui lo spazio è **ramificato**.

Esempio: rete stradale



Perché i grafi?

Permettono di studiare matematicamente fenomeni reali in cui lo spazio è **ramificato**.

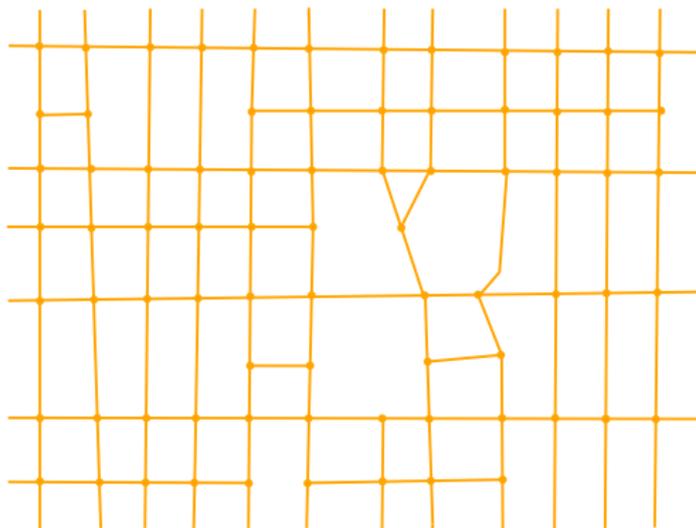
Esempio: rete stradale



Perché i grafi?

Permettono di studiare matematicamente fenomeni reali in cui lo spazio è **ramificato**.

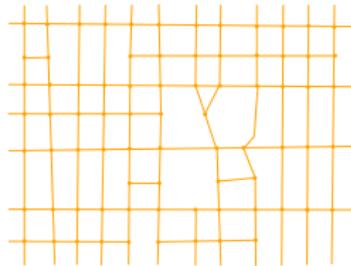
Esempio: rete stradale



Perché i grafi?

Permettono di studiare matematicamente fenomeni reali in cui lo spazio è **ramificato**.

Esempio: rete stradale

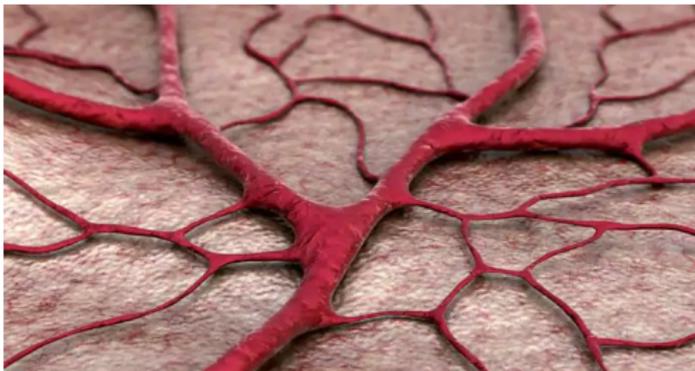


Perchè i grafi?

Altri esempi: vasi sanguigni...

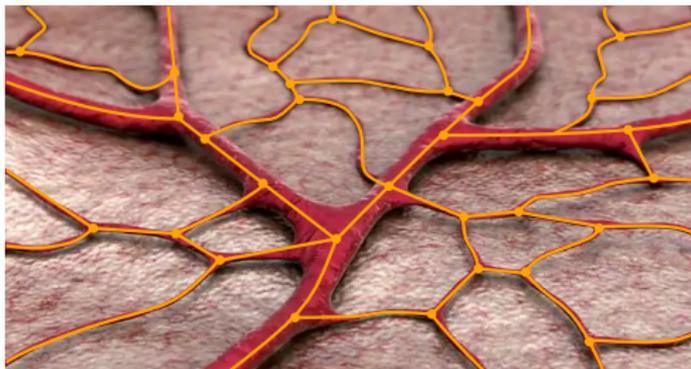
Perchè i grafi?

Altri esempi: vasi sanguigni...



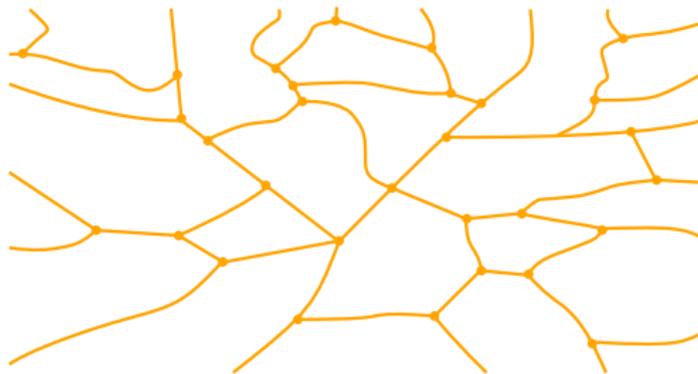
Perchè i grafi?

Altri esempi: vasi sanguigni...



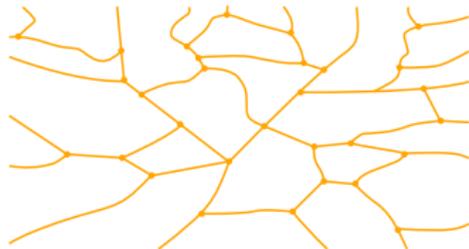
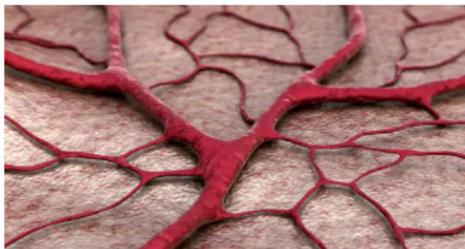
Perchè i grafi?

Altri esempi: vasi sanguigni...



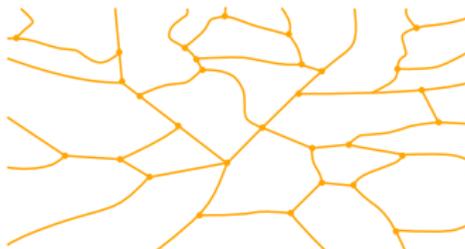
Perchè i grafi?

Altri esempi: vasi sanguigni...



Perchè i grafi?

Altri esempi: vasi sanguigni...

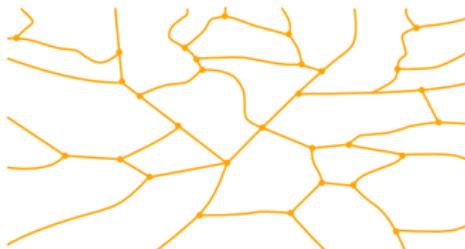


... reti idriche...

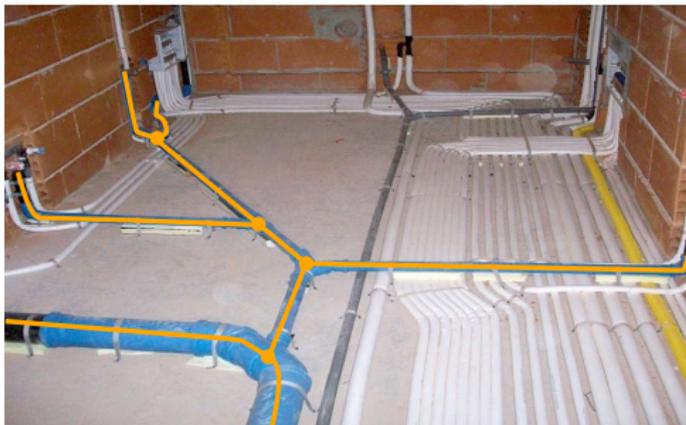


Perchè i grafi?

Altri esempi: vasi sanguigni...

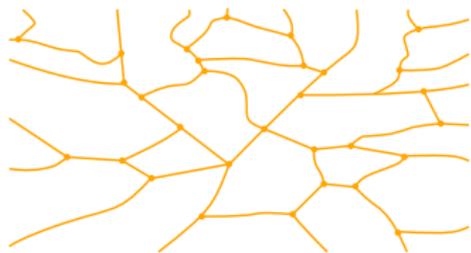


... reti idriche...



Perchè i grafi?

Altri esempi: vasi sanguigni...

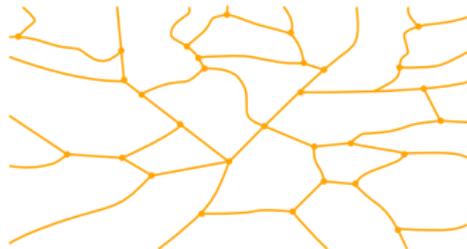


... reti idriche...



Perchè i grafi?

Altri esempi: vasi sanguigni...

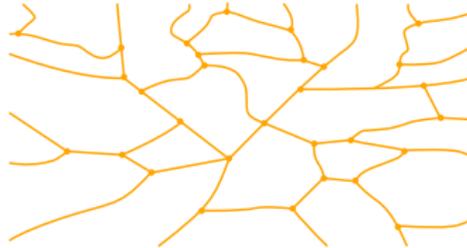
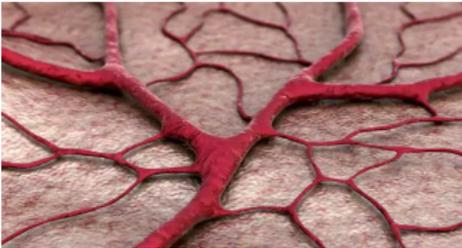


... reti idriche...



Perchè i grafi?

Altri esempi: vasi sanguigni...



... reti idriche...



Ciò che ci interessa oggi è legato alla fisica degli stati della materia.

Gli stati della materia: solidi, liquidi, gas e...

Quotidianamente facciamo esperienza di tre stati in cui la materia che ci circonda si presenta:

Gli stati della materia: solidi, liquidi, gas e...

Quotidianamente facciamo esperienza di tre stati in cui la materia che ci circonda si presenta:

solido



liquido



gassoso



Gli stati della materia: solidi, liquidi, gas e...

Quotidianamente facciamo esperienza di tre stati in cui la materia che ci circonda si presenta:

solido



liquido



gassoso



Possiamo immaginare la materia formata da "microscopiche palline in movimento" (molecole, atomi,...) di cui è possibile conoscere simultaneamente posizione e velocità.

Gli stati della materia: solidi, liquidi, gas e...

Quotidianamente facciamo esperienza di tre stati in cui la materia che ci circonda si presenta:

solido



liquido



gassoso



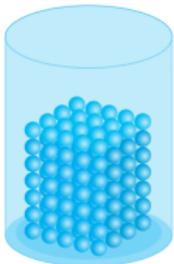
Possiamo immaginare la materia formata da "microscopiche palline in movimento" (molecole, atomi,...) di cui è possibile conoscere simultaneamente posizione e velocità.

La differenza tra solidi, liquidi e gas risiede nel grado di libertà di cui godono le singole particelle.

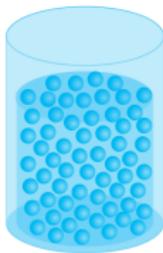
Gli stati della materia: solidi, liquidi, gas e...

Quotidianamente facciamo esperienza di tre stati in cui la materia che ci circonda si presenta:

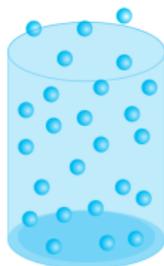
solido



liquido



gassoso



Possiamo immaginare la materia formata da "microscopiche palline in movimento" (molecole, atomi,...) di cui è possibile conoscere simultaneamente posizione e velocità.

La differenza tra solidi, liquidi e gas risiede nel **grado di libertà** di cui godono le singole particelle.

...plasma e condensati di Bose-Einstein

Tuttavia, esistono altri due stati della materia: lo **stato plasmatico** e i **condensati di Bose-Einstein**.

...plasma e condensati di Bose-Einstein

Tuttavia, esistono altri due stati della materia: lo **stato plasmatico** e i **condensati di Bose-Einstein**.

Per i **condensati di Bose-Einstein**, ci serve la **fisica quantistica**.



Non è possibile conoscere simultaneamente posizione e velocità di una particella.

...plasma e condensati di Bose-Einstein

Tuttavia, esistono altri due stati della materia: lo **stato plasmatico** e i **condensati di Bose-Einstein**.

Per i **condensati di Bose-Einstein**, ci serve la **fisica quantistica**.



Non è possibile conoscere simultaneamente posizione e velocità di una particella.

La domanda

"Dove si trova la particella?"

...plasma e condensati di Bose-Einstein

Tuttavia, esistono altri due stati della materia: lo **stato plasmatico** e i **condensati di Bose-Einstein**.

Per i **condensati di Bose-Einstein**, ci serve la **fisica quantistica**.



Non è possibile conoscere simultaneamente posizione e velocità di una particella.

La domanda

"**Dove** si trova la particella?"

diventa

"Qual è la **probabilità** di trovare la particella in una certa regione dello spazio?"

...plasma e condensati di Bose-Einstein

Tuttavia, esistono altri due stati della materia: lo **stato plasmatico** e i **condensati di Bose-Einstein**.

Per i **condensati di Bose-Einstein**, ci serve la **fisica quantistica**.



Non è possibile conoscere simultaneamente posizione e velocità di una particella.

La domanda

"**Dove** si trova la particella?"

diventa

"Qual è la **probabilità** di trovare la particella in una certa regione dello spazio?"

L'oggetto matematico chiave diventa la **funzione d'onda**: ci dice la **probabilità** di trovare la particella nelle varie zone dello spazio.

I condensati di Bose–Einstein

1. Prendiamo un gas molto rarefatto di rubidio confinato in una trappola magnetica/ottica.

A **temperature relativamente alte**, la fisica classica descrive bene il comportamento delle particelle.

I condensati di Bose–Einstein

2. **Abbassando la temperatura** verso lo zero assoluto ($-273\text{ }^{\circ}\text{C}$), gli effetti quantistici diventano dominanti.

Le particelle **rallentano** e la loro **energia decresce**.

I condensati di Bose–Einstein

3. Sotto una **temperatura critica** (diversa dallo zero assoluto), appare un **condensato**.

La **maggioranza** delle particelle raggiunge la **minima energia** possibile ed è descritta dalla **stessa funzione d'onda**.

Tutti gli uomini dei condensati

1924–25: Satyendra Nath Bose e Albert Einstein



dimostrano matematicamente che i condensati devono esistere.

Tutti gli uomini dei condensati

1924–25: Satyendra Nath Bose e Albert Einstein



dimostrano matematicamente che i condensati devono esistere.

1995–2001: Eric Cornell, Carl E. Weiman e Wolfgang Ketterle



realizzano sperimentalmente un condensato per la prima volta e vengono insigniti del premio Nobel per la Fisica.

E quindi perché Schrödinger?

E quindi perché Schrödinger?

Matematicamente, i **condensati di Bose–Einstein** si possono descrivere con l'**equazione di Schrödinger nonlineare**.

E quindi perché Schrödinger?

Matematicamente, i **condensati di Bose–Einstein** si possono descrivere con l'**equazione di Schrödinger nonlineare**.

In particolare, la **funzione d'onda** del condensato si trova come configurazione di **energia minima** associata all'equazione.

E quindi perché Schrödinger?

Matematicamente, i **condensati di Bose–Einstein** si possono descrivere con l'**equazione di Schrödinger nonlineare**.

In particolare, la **funzione d'onda** del condensato si trova come configurazione di **energia minima** associata all'equazione.

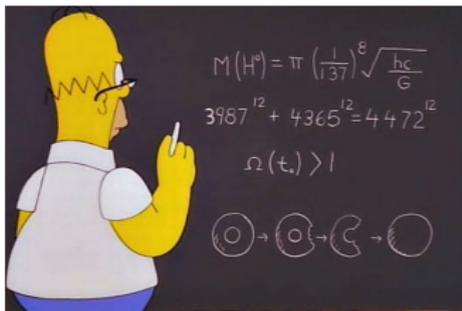
Il fisico si chiede:

"Posso far **condensare** questo sistema di particelle?"



Il matematico riformula:

"Posso trovare una configurazione di **energia minima**?"



Va bene Schrödinger, ma allora perché i grafi?

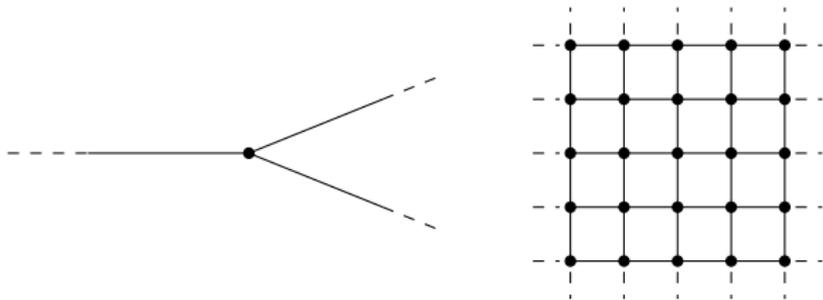
Va bene Schrödinger, ma allora perché i grafi?

Per formare un condensato di Bose–Einstein è necessario ingabbiare le particelle all'interno di una regione confinata: una **trappola**.

Va bene Schrödinger, ma allora perché i grafi?

Per formare un condensato di Bose–Einstein è necessario ingabbiare le particelle all'interno di una regione confinata: una **trappola**.

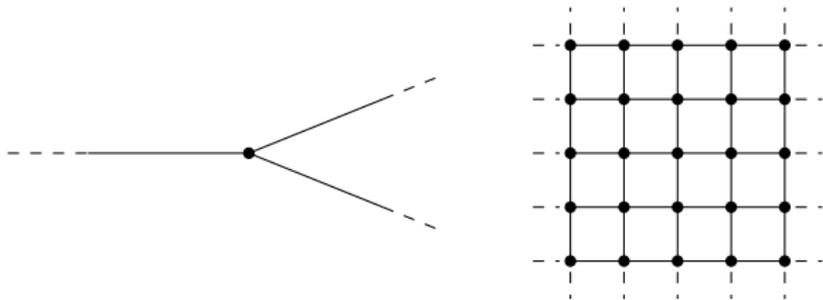
A partire dal 2011, sono emersi primissimi studi sperimentali di condensati di Bose–Einstein in **trappole ramificate**



Va bene Schrödinger, ma allora perché i grafi?

Per formare un condensato di Bose–Einstein è necessario ingabbiare le particelle all'interno di una regione confinata: una **trappola**.

A partire dal 2011, sono emersi primissimi studi sperimentali di condensati di Bose–Einstein in **trappole ramificate**



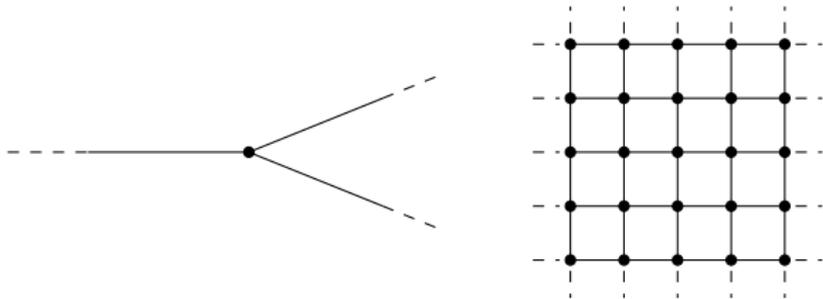
Domanda fisica: **su quali grafi si può condensare?**

Tradotto in matematica: **su quali grafi posso trovare una configurazione di energia minima per l'equazione di Schrödinger nonlineare?**

Va bene Schrödinger, ma allora perché i grafi?

Per formare un condensato di Bose–Einstein è necessario ingabbiare le particelle all'interno di una regione confinata: una **trappola**.

A partire dal 2011, sono emersi primissimi studi sperimentali di condensati di Bose–Einstein in **trappole ramificate**

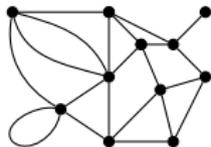


Domanda fisica: **su quali grafi si può condensare?**

Tradotto in matematica: **su quali grafi posso trovare una configurazione di energia minima per l'equazione di Schrödinger nonlineare?**

La risposta **dipende fortemente** dal grafo.

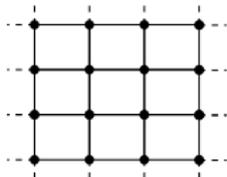
Per esempio, l'esistenza di una configurazione di energia minima



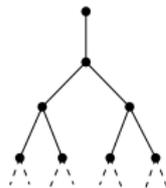
vale sempre



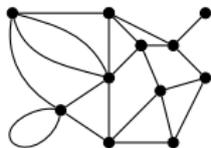
dipende dal grafo



dipende dalla densità di particelle



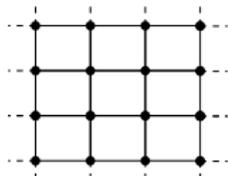
Per esempio, l'esistenza di una configurazione di energia minima



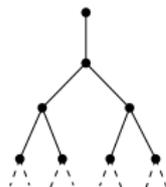
vale sempre



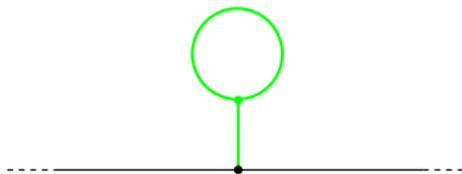
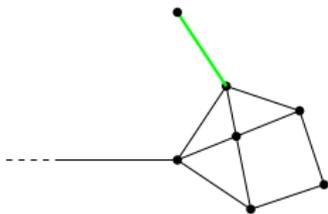
dipende dal grafo



dipende dalla densità di particelle



mentre la sua forma risente di strutture specifiche nel grafo



equazione di Schrödinger nonlineare

$$-i\partial_t u = \partial_{xx}^2 u + |u|^{p-2} u$$

energia di Schrödinger nonlineare

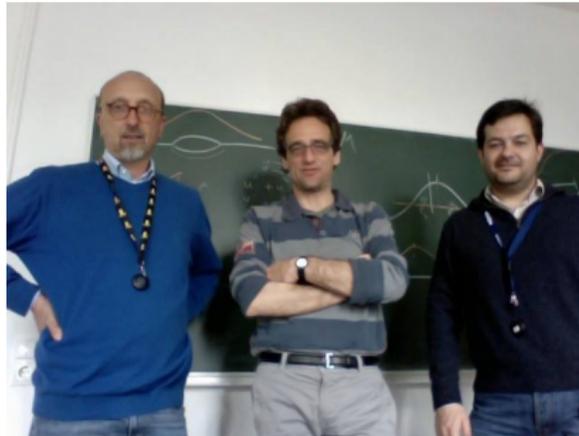
$$E(u) = \frac{1}{2} \int |u'|^2 dx - \frac{1}{p} \int |u|^p dx$$

massa

$$\mu = \int |u|^2 dx$$

La squadra dei grafisti al Politecnico di Torino

Enrico Serra, Riccardo Adami, Paolo Tilli (da sinistra)



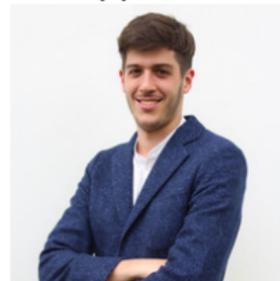
Lorenzo Tentarelli



Alice Ruighi



Filippo Boni



Grazie!